

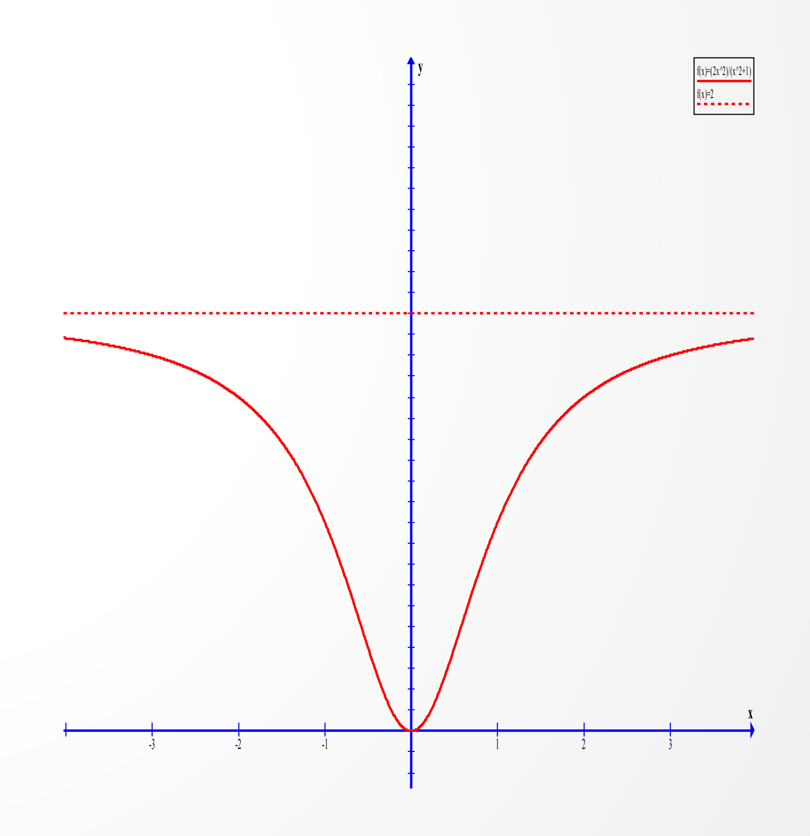
Cálculo I

Limites no Infinito

Noção Intuitiva

- Qual o comportamento da função $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$ a medida que x cresce arbitrariamente?

x	f(x)
0	0
1	1
2	1,6
4	1,882353
10	1,980198
100	1,999800
1000	1,999998
...	...



- Seja uma função $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$, dizemos que o limite de f(x) quando x cresce indefinidamente é L, e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número N > 0, tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Definição

- Seja uma função $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$, dizemos que o limite de f(x) quando x decresce indefinidamente é L, e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

se para todo $\varepsilon>0$, existe um número M < 0, tal que $x<M\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$.

Exemplo 1

- Mostre que

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Teorema

Se n é um número inteiro positivo, então:

(i) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemplos 2

- Determinar os limites:

$$a)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-5}{x+8}$$

$$b)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}$$

$$c)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$$

$$d)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$$

$$e)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

Assíntota vertical

- A reta x = a será uma assíntota vertical do gráfico da função f(x), se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Assíntota Horizontal

- A reta y = b será uma assíntota horizontal do gráfico da função f(x), se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Assíntota inclinada ou oblíqua

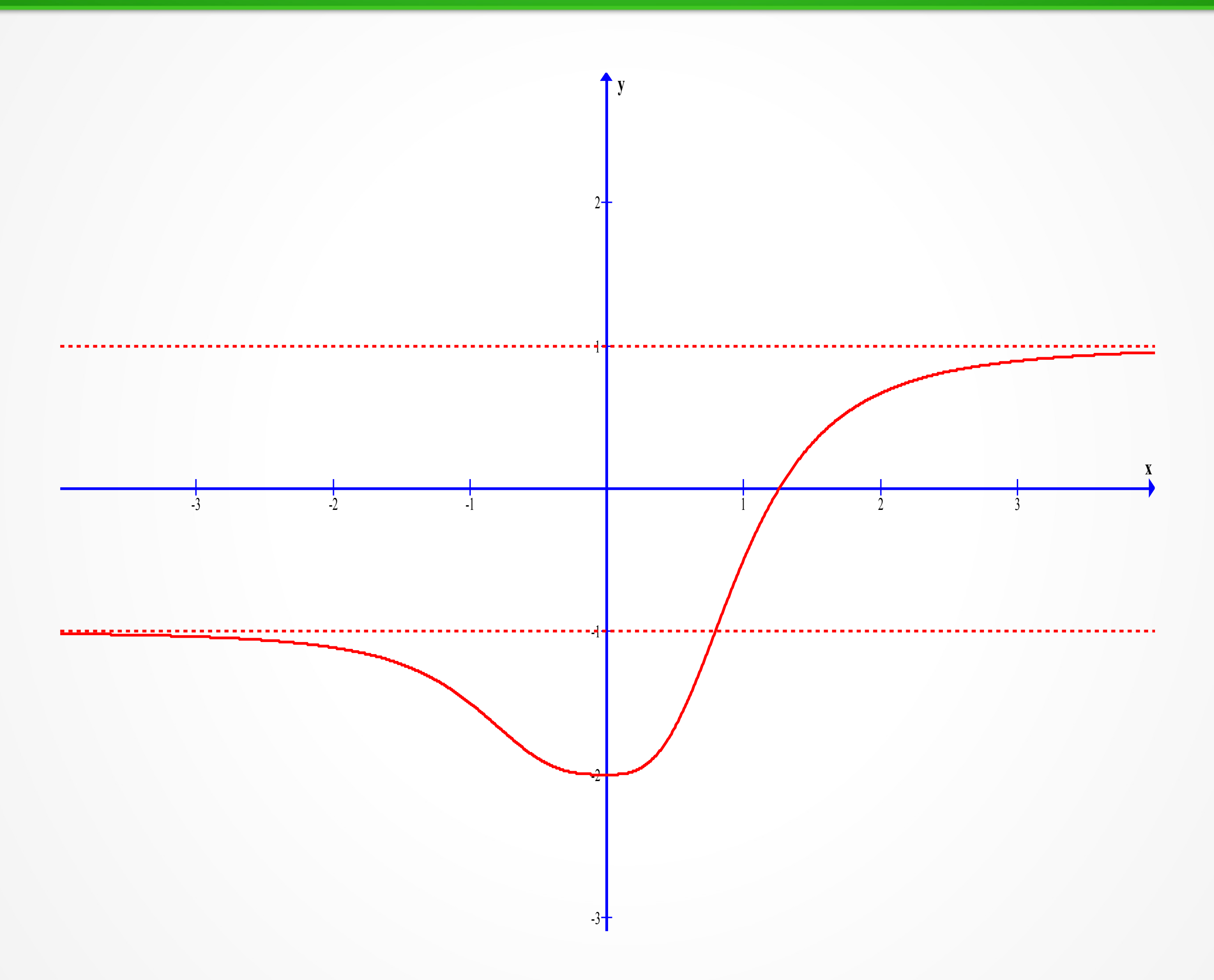
- A reta y = ax + b será uma assíntota inclinada do gráfico da função f(x), se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

Exemplo 3

- Encontre as assíntotas horizontais para o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$


y
2
1
x
-3
-2
-1
1
2
3
-1
-2
-3

Exemplo 4

- A reta x = 1 é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

  E podemos dizer que o eixo x é uma assíntota horizontal do gráfico de f(x)?

Exemplo 5

- Determine a assíntota oblíqua do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$. Esse gráfico possui assíntota vertical?

Observação

- Se o grau do numerador de uma função racional for 1 grau maior do que o grau do denominador, o gráfico possuirá uma assíntota oblíqua. Determinamos uma equação para a assíntota ao dividirmos o numerador pelo denominador para expressar f como uma função linear mais um resto que é igual a zero quando $x \to \pm\infty$.

Gráfico de f(x) do exemplo 5

